

EXERCICE 3

Étude d'une marche aléatoire

On considère trois points distincts du plan nommés A , B et C . Nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points.

À l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A . Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

1. le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n + 1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n , plus précisément il ne dépend pas des positions occupées aux autres étapes précédentes ;
2. pour passer de l'étape n à l'étape $n + 1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'évènement "le pion se trouve en A à l'étape n ", B_n l'évènement "le pion se trouve en B à l'étape n " et C_n l'évènement "le pion se trouve en C à l'étape n ". On note également :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = P(A_n), \quad q_n = P(B_n), \quad r_n = P(C_n) \quad \text{et} \quad V_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix},$$

et on considère la matrice :

$$M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Dans l'exercice, on pourra utiliser **sans le démontrer** le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = \frac{1}{3 \cdot 4^n} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que si E et F sont deux évènements avec $P(F) > 0$, on définit la probabilité conditionnelle de E sachant F (notée $P(E | F)$ ou $P_F(E)$) par :

$$P(E | F) = P_F(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}.$$

Partie I - Calcul des probabilités

- Q28.** Calculer les nombres p_n, q_n et r_n pour $n = 0$ et $n = 1$.
- Q29.** Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la relation $V_{n+1} = MV_n$.
- Q30.** En déduire que $V_n = M^n V_0$, puis une expression de p_n, q_n et r_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Q31.** Déterminer les limites respectives des suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Interpréter le résultat.

Partie II - Nombre moyen de passages en A

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n le nombre moyen de passages du pion en A entre l'étape 1 et l'étape n et on définit la variable aléatoire :

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si } A_n \text{ est réalisé,} \\ 0 & \text{si } \bar{A}_n \text{ est réalisé.} \end{cases}$$

Q32. Interpréter la variable aléatoire $X_1 + \dots + X_n$ et le nombre $E(X_1 + \dots + X_n)$.

Q33. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Q34. En déduire une expression de a_n .

Partie III - Temps d'attente avant le premier passage en B

On définit la variable aléatoire T_B de la façon suivante :

1. si le pion ne passe jamais en B, on pose $T_B = 0$;
2. sinon, T_B est le numéro de l'étape à laquelle le pion passe pour la première fois en B.

Nous allons déterminer la loi de T_B et son espérance.

Q35. Calculer $P(T_B = 1)$ et $P(T_B = 2)$.

Q36. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer \bar{B}_n en fonction de A_n et C_n .

Q37. Établir que $P(B_3 \cap \bar{B}_2 \cap \bar{B}_1) = \frac{1}{4}P(\bar{B}_2 \cap \bar{B}_1)$, puis en déduire que $P(B_3 | \bar{B}_2 \cap \bar{B}_1) = \frac{1}{4}$.

Dans la suite, on admet la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P\left(B_{n+1} \mid \bigcap_{k=1}^n \bar{B}_k\right) = \frac{1}{4}.$$

Q38. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(T_B = k)$. Que vaut $P(T_B = 0)$?

Q39. Justifier que la variable aléatoire T_B admet une espérance. Quelle est l'espérance de T_B ?

FIN